Goniometrické funkce

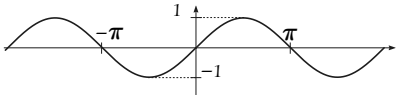
oscilující systémy

Možná si ze školy pamatujete, že v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou 1 je *sinus x* roven délce protější strany a *kosinus x* délce sousední strany. To je sice pravda, ale matematici se tak na goniometrické (trigonometrické) funkce nedívají. V první řadě *x* není *úhel*, ale jen číslo. Navíc funkce sin *x* a cos *x* jsou definovány tak, že se opakují s délkou cyklu 2π. Při tomto pohledu může argument funkce (x) nabývat libovolné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$, přičemž výsledkem je číslo v rozsahu od -1 do $+1$. Sinus a kosinus jsou spojité funkce.

Funkce tangens je definována jako sin x/cos x a vypadá jinak než funkce sin x a cos x, protože má singularity. Další goniometrické funkce, sekans, kosekans a kotangens, jsou převrácené hodnoty kosinu, sinu a tangens.

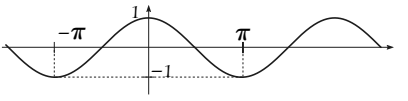
Tak jako samotná lomená (převrácená) funkce mají i všechny tyto funkce (kromě sinu a kosinu) singularity (v bodech 0 nebo $\pi/2, \pm n\pi$), ale přesto jsou to všechno jinak naprosto „normální“, jednohodnotové funkce proměnné x.

Funkce sinus a kosinus mohou reprezentovat různé oscilační soustavy, například kyvadlo nebo jednoduchý harmonický oscilátor.



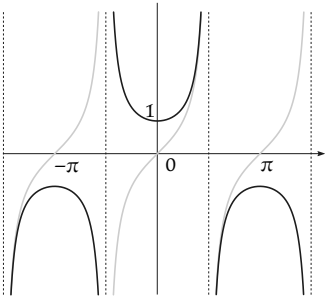
SINUS

$f(x) = \sin(x)$



KOSINUS

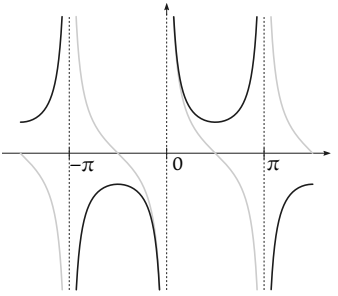
$f(x) = \cos(x)$



SEKANS

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

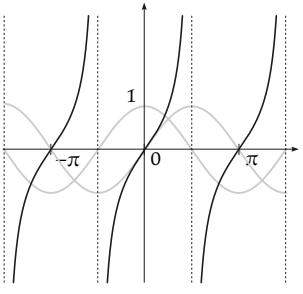
Jak sec x (černá), tak tan x (šedá) mají singularity ve stejném místě. Tam, kde je tan x nulový, má sec x své vrcholy.



KOSEKANS

$$f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

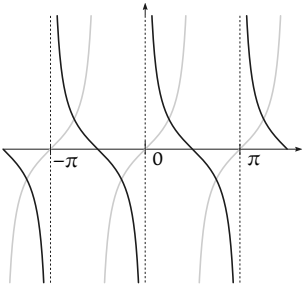
Graf funkce cosec x je stejný jako sec x, ale posunutý o $\pi/2$. Cosec x (černá) a cot x (šedá) mají singularity ve stejném místě.



TANGENS

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Grafy funkcí sinus a kosinus jsou stejné, ale posunuté (šedě), zatímco graf funkce tangens (černě) má singularity vždy, když cos x = 0.



KOTANGENS

$$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Funkce kotangens (černě) má stejný tvar jako funkce tangens (šedě), ale je vůči ní převrácená a posunutá o $\pi/2$.

VÍCEHODNOTOVÉ FUNKCE

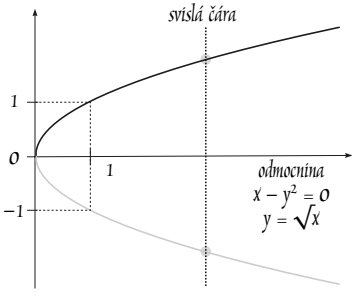
implicitní a parametrické rovnice

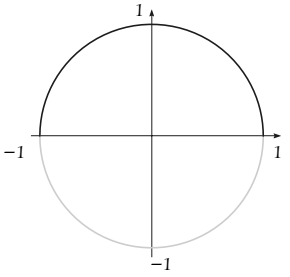
Všechny funkce, které jsme dosud popisovali, byly *explicitní*: hodnotu funkce $f(x)$ šlo vyjádřit ve formě rovnice obsahující pouze proměnnou x.

Vezměme si však rovnici $x^2 + y^2 = 1$. Tu lze převést na funkci $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)}$. Takové rovnice, v nichž jsou členy x a y smíchány dohromady, se nazývají *implicitní* rovnice. Funkce, které z nich vznikají, mohou být vícehodnotové, protože každá rovnice, kde se druhá mocnina rovná kladnému číslu, má dva kořeny, protože každé kladné číslo má dvě odmocniny. Důležité je, že ne všechny implicitní rovnice lze snadno převést na rovnice explicitní (například Descartesovo Folium, $x^3 + y^3 = 3xy$, *strana 20*).

Dole vidíme funkci *odmocnina*. Ačkoli se zdá, že je vícehodnotová, protože svislá čára protíná graf na dvou místech, matematici ji považují za dvě samostatné funkce s různými obory hodnot (kodoménami), z nichž jedna udává kladnou a druhá zápornou odmocninu. Implicitní rovnice pro funkci odmocniny je $x - y^2 = 0$ a vícehodnotová rovnice je $y = \sqrt{x}$.

Funkce kružnice a elipsy (*naproti*) lze také chápat buď jako jednu vícehodnotovou funkci, nebo jako dvě samostatné funkce. Jiný způsob definice implicitní rovnice má podobu dvou rovnic, jednu pro x a druhou pro y, vyjádřených pomocí třetí proměnné (často θ nebo t). Takové rovnice se nazývají *parametrické* a některé jejich příklady jsou uvedeny naproti.



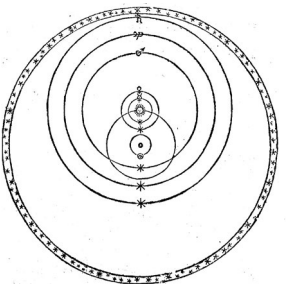


KRUŽNICE

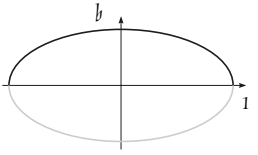
funkce implicitní: $x^2 + y^2 = 1$

vícehodnotová: $y = \sqrt{(1-x^2)}$

parametrická: $x = \cos\theta$; $y = \sin\theta$



Model Sluneční soustavy od Tychona Braheho. Všechny rané modely Sluneční soustavy předpokládaly, že se planety pohybují po dokonalých kružnicích.

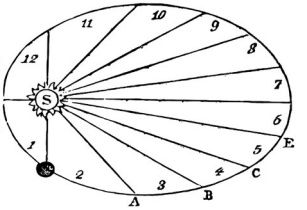


ELIPSA

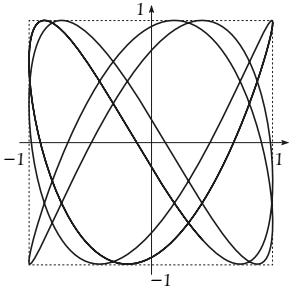
funkce implicitní: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

vícehodnotová: $y = b\sqrt{(1-x^2/a^2)}$

parametrická: $x = a\cos\theta$; $y = b\sin\theta$



Podle Keplerových zákonů obíhají planety kolem Slunce po elipsách se Sluncem v ohnisku. Plochy opsané průvodičem za stejný čas jsou stejné.



LISSAJOUSOVY OBRAZCE

$x = \cos(3t)$ $y = \cos(5t + 0{,}2)$

Lissajousovy obrazce jsou parametrické funkce definované dvojicí rovnic:

$x = \cos(nt)$ $y = \cos(mt + \phi)$

kde t je uplynulý čas a ϕ mění fázový poměr. Pěkné obrázky vyjdou pro n a m v jednoduchých poměrech, třeba 2 : 3 nebo 3 : 5 jako zde.

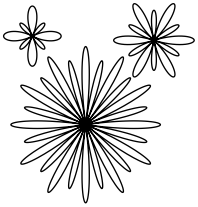
Polární funkce

spirály, ryby a motýli

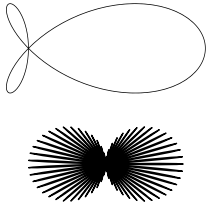
Vedle *kartézských souřadnic* (x, y) lze křivky generovat pomocí *polárních souřadnic* (θ, r), kde je *modul* r (vzdálenost od počátku) definován jako funkce *argumentu* (vstupní hodnoty), úhlu θ.

Polární rovnice $r = a$ vytváří kružnici o poloměru a, zatímco z rovnice $r = a\theta$ vyjde rovnoměrně rozložená *Archimedova spirála*. V přírodě (třeba v květech slunečnic a ulitách hlemýžďů) se běžně vyskytuje *logaritmická spirála* $r = ae^{\theta}$ (*obě naproti*). Logaritmické spirály jsou soběpodobné, vypadají tedy stejně bez ohledu na měřítko.

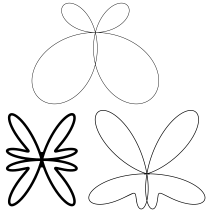
Některé polární funkce využívají goniometrické funkce, například $r = \cos(n\theta)$ vytváří sedmikráskovou křivku s $2n$ okvětními lístky pro sudé (a s n okvětními lístky pro liché) hodnoty n. Změnou počáteční rovnice (*dole vlevo*) lze nakreslit různé tvary kopretin. Další zajímavou polární funkcí je kardioida $r = 1 + \cos\theta$, která vznikne, když na kruhový šálek čaje posvítíme silným světlem (*naproti*). Jednoduché polární rovnice lze použít k vytvoření mnoha dalších poutavých grafů.



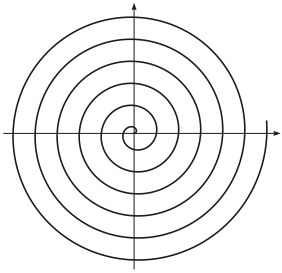
SEDMIKRÁSKY
$r = 1 + \cos(n\theta)$
$n = 4, 6, 12$



RYBA/HŘEBENATKA
$r = \cos\theta \cos 2\theta$
$r = \cos\theta \cos 64\theta$



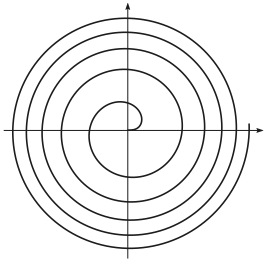
MOTÝL
$r = 2\sin 2\theta - \sin n\theta$
$n = -8, 4, 6$



ARCHIMEDOVA SPIRÁLA

$r = a\theta$,

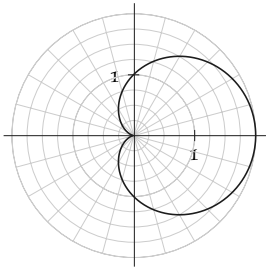
kde a je konstanta k určení odstupu ramen spirály.



FERMATOVA SPIRÁLA

$r^2 = a^2\theta$

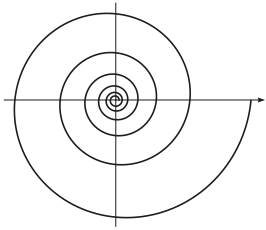
Parabolická spirála, kde a je konstanta. V každém závitu je stejná plocha.



KARDIOIDA

$r = 1 + \cos\theta$

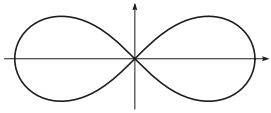
s podkresem polární souřadnicové sítě.



LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

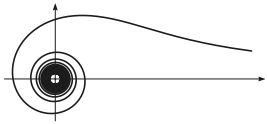
$r = ae^{b\theta}$

Exponenciální (rovnoúhlá) spirála, a, b jsou konstanty a e je Eulerovo číslo.



OSMIČKOVÁ KŘIVKA (LEMNISKÁTA)

$r = \sqrt{\cos 2\theta}$



LITUUOVA SPIRÁLA

$r = \sqrt[a]{\theta}$